Giải tích số

Phương pháp Gauss – Jordan giải hệ phương trình

Phương pháp khử Gauss- Jordan là một cải tiến của khử Gauss, thay vì đưa ma trận suy rộng về dạng ma trận tam giác trên (hoặc dưới), Gauss- Jordan biến đổi dùng cách khử dần các ẩn để đưa hệ phương trình đã cho về một dạng ma trận đường chéo rồi giải hệ phương trình này, không phải tính bất kì một định thức nào.

1. Bài toán đặt ra

Về mặt lý thuyết đại số, một hệ phương trình n ẩn có thể giải được trọn vẹn nhờ lý thuyết ma trận và định thức. Tuy nhiên, với trường hợp ma trận không suy biến, nếu giải bằng phương pháp Cramer thì số phép tính là rất lớn, khoảng *n*!, *n*2 phép tính nhân chia. Nhằm khắc phục hạn chế đó, nhiều phương pháp giải hệ phương trình trong thực tế đã được đưa ra nhằm giải hệ phương trình bằng ma trận suy rộng với một tốc độ tính toán tốt hơn.

Khi giải các bài toán hệ phương trình thực tế, với đặc điểm chung là bài toán đã cho có *ma trận hệ số* là vuông cấp *n* x *n* và hệ phương trình luôn tồn tại một nghiệm duy nhất, phương pháp khử Gauss - Jordan có thể được sử dụng hiệu quả.

1. Phương pháp khử Gauss – Jordan ( Gauss – Jordan Elimination )
2. Ý tưởng thuật toán

Hạn chế sai số tính toán khi gặp các phép chia cho số gần bằng với 0, bằng cách chọn phần tử khử thích hợp

Dùng phép khử ẩn thứ k (tương ứng với cột có chứa phần tử khử) khỏi tất cả các hàng không chứa phần tử khử

Từ những hạn chế trong việc chọn phần tử khử của phương pháp khử Gaus, giải pháp được đưa ra là làm trội phần tử để tìm ra phần tử khử tiếp theo tối ưu hơn

1. Đại số tuyến tính

* Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để xây dựng tuần tự các cột chuẩn
* Việc chuẩn hóa phải tuân thủ 2 nguyên tắc sau:

a) Khi xây dựng cột thì không làm thay đổi các cột trước nó ( C1 ,C2 ,…, Ck-1 ).

b) Nếu tại cột đang xét Ek không thể chuẩn hóa thì chuẩn hóa tiếp cột kế cận bên phải.

* Quá trình chuẩn hóa cột kết thúc khi:

a) Gặp mâu thuẫn (0 0 … 0 |a ) với a ≠ 0.

b) Chuẩn hóa xong cột cuối của ma trận (không gặp mâu thuẫn).

1. Thuật toán

Khử 1**:**Dùng phương trình đầu tiên để khử x1 trong n-1 phương trình còn lại, cách làm tương tự như phương pháp khử Gauss... ( trước khi khử ta có thể chia phương trình thứ nhất cho a11)

Để khử *x*1 ở các hàng thứ *k* (*k* = 2, 3,...,*n*) ta phải tính lại các hệ số *a*(*kj*) ở hàng thứ k

(*j* = 1, 2,..., *n*+1) như sau: *akj*= a*kj* – *a*1*j* \* *ak1*/*a11* ...

- Khử thứ i**:**Dùng phương trình i để khử xi trong các phương trình thứ 1, 2, i–1, i +1, i +2,..., i.

( trước khi khử ta có thể chia phương trình thứ *i* cho aii )

Cụ thể để khử xi ở hàng thứ *k* (k = 1, 2, *i*–1, *i*+1, *i*+2,..., *n*) ta phải tính lại các hệ số *akj* ở hàng thứ *k* (*j* = i,..., *n*+1) như sau: *akj* = *akj* – *aij* \* *aki*/*aii* ...

Lưu ý: Tương tự phép khử Gauss, tại mỗi bước, trước khi khử ta phải chọn trụ tối đại. Cụ thể tại bước i ta luôn chọn hàng có phần tử ari có giá trị tuyệt đối lớn nhất rồi đổi chỗ 2 hàng r và I tưởng ứng, tiếp tục thực hiện thủ tục trừ hàng cho hàng.

INPUT: cấp n của ma trận, Ma trận vuông cấp n, ma trận tự do

B1: Lấy phần tử khử c

- Tạo biến p(vị trí hàng) và q(vị trí cột)

- Tìm phần tử đầu tiên trong ma trận = 0; thực hiện đổi vị trí hàng chứa phần tử đó và hàng hiện tại đang xét

- Nếu không tồn tại phần tử như vậy, chọn phần tử có giá trị tuyệt đối lớn nhất trong các hàng; giá trị của p và q được gán bằng vị trí hàng, cột của phần tử đó; thực hiển đổi vị trí hàng

B2: Quá trình khử

* Thực hiện phép khử trên từng hàng k, bỏ qua nếu đó là hàng chứa phần tử khử:

+ Gán h = A[i][c] / A[k][c]

+ A[i][j]=A[i][j]-h\*A[k][j] (biến đổi ma trận theo hàng để khử theo xk )

+ S[i]=S[i] – h\*S[k] (ma trận tự do )

+ Chuyển sang khử hàng tiếp theo k + 1

B3: Chuẩn hóa nghiệm

* Xét lần lượt các giá trị của ma trận hệ số, nếu có giá trị tuyệt đối |A[i][j]| > 10^-17 ( gần như bằng 0); thực hiện lấy nghiệm X[p]=S[i]/A[i][p] ( A[i][p] là các hệ số thuộc đường chéo ma trận sau khi khử)